补充题

概率的定义与性质(运算关系)

例1 某医院一天中接诊外科病人50人，内科病人50人，五官科病人50人。设每位病人在一科室至多就诊一次，其中只看外科的占病人总数的20%，只看内科的占25%，只看五官科的占15%, 三者全看的占10%. 问

（1）一天共接诊多少病人？

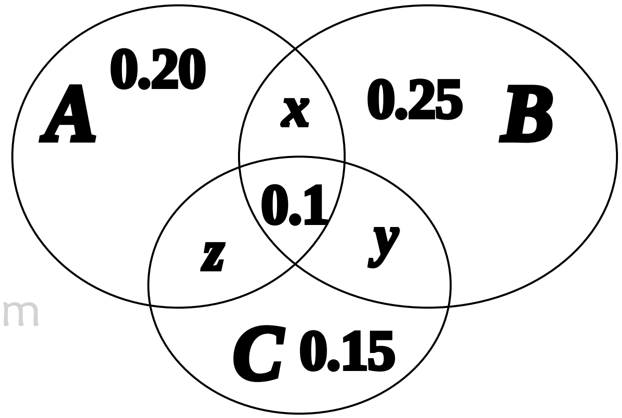
（2）只看外科与内科的占病人总数的多少？

解：以A, B, C表示外科、内科、五官科接诊的病人集合。

$$A+B+C=ABC+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$$

已知 $P(ABC)=0.1, P(A\overline{B}\,\overline{C})=0.2,$

$P(\overline{A}B\overline{C})=0.25, P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0.25,$



设 $P(AB\overline{C})=x, P(\overline{A}BC)=y,$

$P(A\overline{B}C)=z,$ 总病人数为S,

$$\begin{cases} S(0.2+x+y+0.1)=50, \\ S(0.25+y+z+0.1)=50, \\ S(0.15+x+z+0.1)=50, \\ x+y+z=1-0.2-0.25-0.15-0.1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0.05 \\ y=0.15 \\ z=0.10 \\ S=100 \end{cases}$$

例2 在数集$\{1,2,\cdots,100\}$中随机地取一个数,已知取到的数不能被2整除,求它能被3或5整除的概率.

解 以A_2, A_3, A_5分别表示取到的数能被2,3,5整除,

所求概率为

$$P(A_3 \cup A_5 | \overline{A_2}) = \frac{P[(A_3 \cup A_5)\overline{A_2}]}{P(\overline{A_2})}$$

$$= \frac{P(A_3\overline{A_2}) + P(A_5\overline{A_2}) - P(A_3A_5\overline{A_2})}{P(\overline{A_2})}.$$

而 $P(A_3\overline{A_2}) = P[A_3(S - A_2)] = P(A_3) - P(A_3A_2).$

因A_3A_2表示事件“能被6整除”，故 $P(A_3A_2)=16/100$.

于是 $P(A_3\overline{A_2})=\dfrac{33}{100}-\dfrac{16}{100}=\dfrac{17}{100}$.

同样

$$P(A_5\overline{A_2})=P[A_5(S-A_2)]=P(A_5)-P(A_5A_2)$$

$$=\frac{20}{100}-\frac{10}{100}=\frac{10}{100}.$$

$$P(A_3A_5\overline{A_2})=P[A_3A_5(S-A_2)]$$

$$=P(A_3A_5)-P(A_3A_5A_2)$$

$$=\frac{6}{100}-\frac{3}{100}=\frac{3}{100}.$$

故 $$p=\frac{17+10-3}{100}\bigg/\frac{1}{2}=\frac{12}{25}.$$

注意

只有当 $B\subset A$ 时才有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

例3　假设目标出现在射程之内的概率为0.7,这时射击命中目标的概率为0.6,试求两次独立射击至少有一次命中目标的概率.

[思路]　引进事件

$$A=\{目标进入射程\};$$

$$B_i=\{第i次射击命中目标\},\ i=1,2.$$

故所求概率为事件$B=B_1\cup B_2$的概率,由于目标不在射程之内是不可能命中目标的,因此,可利用全概率公式来求解

解　由题意知

$$P(A)=0.7,\ \ P(B_i|A)=0.6,\quad (i=1,2)$$

由于 $P(\overline{A}B)=0$, 因为 $\overline{A}$ 表示目标不在射程之内,

因此由全概率公式有

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(AB)$$

$$=P(A)P(B|A)$$

$$=P(A)P(B_1\cup B_2|A),$$

由题意知 B_1 与 B_2 相互独立,

从而 $P(B_1B_2|A) = P(B_1|A)P(B_2|A)$

$$= 0.6 \times 0.6 = 0.36.$$

由加法公式得

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$$

$$= 0.6 + 0.6 - 0.36$$

$$= 0.84.$$

故 $P(B) = P(A)P(B_1 \cup B_2|A)$

$$= 0.7 \times 0.84 = 0.588.$$

例4　设盒 I 有 6 只红球, 4 只白球; 盒 II 有7只红球, 3只白球. 自盒 I 中随机地取一只球放入盒 II, 接着在盒 II 中随机地取一只球放入盒 I.

(1) 然后在盒 I 中随机地取一只球 , 求取到的是红球的概率.

(2) 求盒 I 中仍有 6 只红球 4 只白球的概率.

解　以 R_1 记事件"第一次在盒 I 中取到一只红球"

以R_2记事件"第二次在盒I中取到一只红球",

以C记事件"在盒II中取到一只红球".

(1) $R_2=[R_1(CR_2\cup\overline{C}R_2)]\cup[\overline{R_1}(CR_2\cup\overline{C}R_2)]$,

$$P[R_1(CR_2\cup\overline{C}R_2)]=P(R_1CR_2)+P(R_1\overline{C}R_2)$$

$$=P(R_2|CR_1)P(C|R_1)P(R_1)$$

$$+P(R_2|\overline{C}R_1)P(\overline{C}|R_1)P(R_1)$$

$$=\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{6}{10}$$

$$=\frac{378}{1100}.$$

$$P[\overline{R_1}(CR_2 \cup \overline{C}R_2)] = P(\overline{R_1}CR_2) + P(\overline{R_1}\,\overline{C}R_2)$$

$$= P(R_2 | C\overline{R_1})P(C | \overline{R_1})P(\overline{R_1})$$

$$+ P(R_2 | \overline{C}\,\overline{R_1})P(\overline{C} | \overline{R_1})P(R_1)$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10}$$

$$= \frac{292}{1100}.$$

于是 $P(R_2) = \dfrac{378}{1100} + \dfrac{292}{1100} = 0.609.$

(2) 以 G 记事件“盒 I 中仍有 6 只红球, 4 只白球”则

$$G = R_1 C \cup \overline{R_1}\,\overline{C}.$$

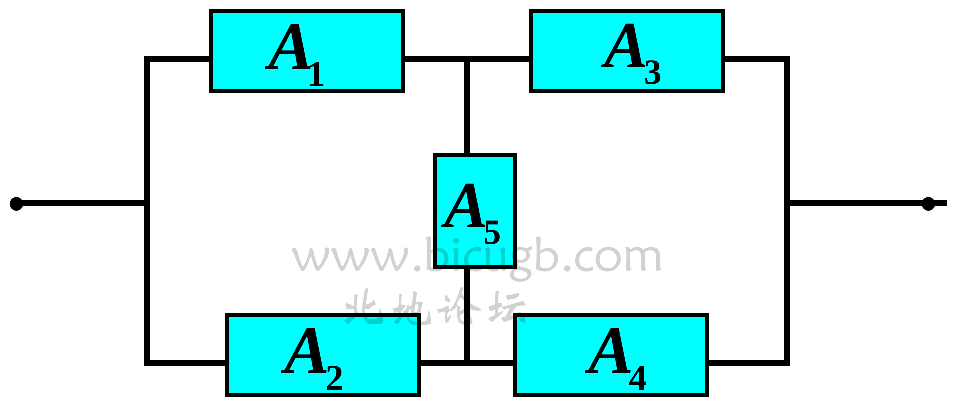
于是 $$P(G) = P(R_1 C \cup \overline{R_1}\,\overline{C})$$

$$= P(C \mid R_1)P(R_1) + P(\overline{C} \mid \overline{R_1})P(\overline{R_1})$$

$$= \frac{8}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10}$$

$$= \frac{64}{110} = 0.582.$$

例4 桥式电路系统由5个元件组成(如图所示),设元件A_i的可靠性为$p_i(i=1,2,\cdots,5)$,求此系统的可靠性.



解 记 $B_i=\{$元件A_i正常工作$\}, i=1,2,\cdots,5,$

$C=\{$系统正常工作$\}.$

从而由全概率公式知

$$P(C)=P(B_5)P(C|B_5)+P(\overline{B_5})P(C|\overline{B_5}).$$

而 $P(C|B_5)=P[(B_1\cup B_2)\cap(B_3\cup B_4)]$

$$=P(B_1\cup B_2)P(B_3\cup B_4)$$

$$=(1-P(\overline{B_1\cup B_2}))(1-P(\overline{B_3\cup B_4})),$$

$$=(1-P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}))(1-P(\overline{B_3}\,\overline{B_4}))$$

$$=(1-P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}))(1-P(\overline{B_3})P(\overline{B_4}))$$

$$=[1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)],$$

$$P(C|\overline{B_5}) = P(B_1B_3 \cup B_2B_4)$$

$$= P(B_1B_3) + P(B_2B_4) - P(B_1B_3B_2B_4)$$

$$= p_1p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3p_4,$$

所以

$$P(C) = p_5[1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)]$$

$$+(1-p_5)(p_1p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3p_4).$$

5. 甲、乙两人同时射击一架飞机，已知甲射中的概率为0.7，乙射中飞机的概率为0.8，飞机被射中的概率为0.9，求甲、乙两人至少有一人未射中飞机的概率。

7. 已知男性有5%的色盲患者，女性有0.25%的色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问：此人是男性的概率是多少？

11. 设A,B为两个事件，且已知$P(A)=0.2, P(B)=0.3, P(\bar{B}|A)=0.6$，求$P(\bar{A}\cup\bar{B})$和$P(B|\bar{A})$。