复变函数总复习

第一章：复数与复变函数

- 复数的概念
- 复数的运算
- 复数的几何表示

1、复平面

1）复数 $z=x+yi$ 用平面上的点(x,y)表示；

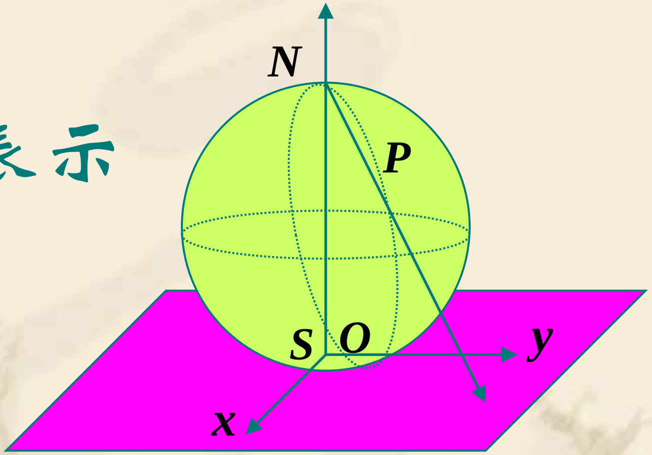
2）复数 $z=x+yi$ 用平面上的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 表示

3）复数的三角表示式及指数表示式

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$$ （三角式）

$$= |z|e^{i\arg z}$$ （指数式）

2、复球面



复数可以用复球面上的点表示

扩充复平面

❖ 复数的乘幂与方根

1、积与商

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则 $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$(r_2 \neq 0)$

例1 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z+i|=2$; (2) $|z-2i|=|z+2|$;

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$.

解 (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为2的点的轨迹.

即表示中心为 $-i$, 半径为 2 的圆.

设 $z=x+iy$, $|x+(y+1)i|=2$,

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$, 圆方程 $x^2+(y+1)^2=4$.

(2) $|z-2i|=|z+2|$

表示所有与点$2i$和-2距离相等的点的轨迹.

故方程表示的曲线就是连接点$2i$和-2的线段的垂直平分线. 设$z=x+iy$,

$|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得 $y=-x$.

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$ 设$z=x+iy$,

$i+\bar{z}=x+(1-y)i$, $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$,

所求曲线方程为$y=-3$.

例2 函数 $w=1/z$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线?

(1) $x^2+y^2=9$, (2) $x=2$

解 (1) 因为 $x^2+y^2=|z|^2=9$

又 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{9}(x-iy)$,

于是 $w=u+iv=\dfrac{1}{9}x-\dfrac{1}{9}iy \Rightarrow u=\dfrac{1}{9}x,\ v=-\dfrac{1}{9}y$

$u^2+v^2=\dfrac{1}{81}(x^2+y^2)=\dfrac{1}{9}$ 表示 w 平面上的圆.

(2) $x=2.$

解 因为 $z=x+iy=2+iy$

所以 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2+iy}=\dfrac{2-iy}{4+y^2}=u+iv$

$$\Rightarrow u=\frac{2}{4+y^2},\ v=-\frac{y}{4+y^2}$$

因为 $u^2+v^2=\dfrac{4+y^2}{(4+y^2)^2}=\dfrac{1}{4+y^2}=\dfrac{u}{2},$

所以 $u^2+v^2-\dfrac{u}{2}=0\Rightarrow\left(u-\dfrac{1}{4}\right)^2+v^2=\dfrac{1}{16}$

表示 w 平面上以 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ 为圆心，$\dfrac{1}{4}$ 为半径的圆.

第二章：解析函数

- 复变函数的导数与微分
- 解析函数的概念

如果 $f(z)$在点 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导，称在 z_0 点解析。如果 $f(z)$在区域D内每一点解析，称 $f(z)$在D内解析，或称 $f(z)$是D内的解析函数（全纯函数或正则函数）。如果 $f(z)$在 z_0 不解析，称 z_0 为 $f(z)$的奇点。

两个解析函数的和、差、积、商（除去分母为0的点）都是解析函数；解析函数的复合函数仍为解析函数。

❖ 复变函数连续、可导、解析之间的关系

$f(z)$在 z_0 解析 $\longrightarrow$ $f(z)$ 在 z_0 可导

$f(z)$在 z_0 连续

$f(z)$在区域D内解析 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$在区域D内可导

❖ 函数可导与解析的充要条件

定理1 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域D内，则 $f(z)$ 在D内点 $z_0=x_0+iy_0$ 可导 $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，且满足柯西-黎曼方程

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0),u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+iy$ 处的导数公式：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

定理2 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D内有定义，则 $f(z)$ 在D内解析 $\Leftrightarrow u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在D内可微，且满足柯西-黎曼方程

$$u_x=v_y, u_y=-v_x$$

复变函数可导与解析的判别方法

（1）利用可导与解析的定义及运算法则

（2）利用可导与解析的充要条件

❖ 初等函数

1、指数函数 $e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$

性质：

（1）$\left|e^z\right| = e^x$，$Arge^z = y + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

（2）对任意的 z_1, z_2，有加法定理 $e^{z_1} \bullet e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

（3）e^z 是以$2\pi i$为周期的周期函数 $e^{z+2\pi i} = e^z$

（4）e^z 在复平面上处处解析，且 $(e^z)' = e^z$

2 三角函数

定义 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$,称为正弦函数.

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,称为余弦函数.

性质 (1) $\sin z$ 是奇函数,$\cos z$ 是偶函数.

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

(2) 正弦函数和余弦函数都以 2π 为周期.

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

(3) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

(4)正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(5) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, 但 $\sin z, \cos z$ 不是有界函数.

定义 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ 称为正切函数.

性质 (1) $\tan z$ 是奇函数: $\tan(-z) = -\tan(z)$.

(2) $\tan z$ 是以 π 为周期的周期函数:

$$\tan(z+\pi) = \tan z.$$

(3) $\tan z$ 在解析区域有 $(\tan z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$.

其它复变三角函数的定义

余切函数 $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$,

正割函数 $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$,

余割函数 $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$.

3、对数函数

$$w = Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

主值分支

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

对数函数的每个分支在除去原点和负实轴的复平面内处处解析，且

$$(Lnz)' = \frac{1}{z}$$

4、幂函数

$$\omega = z^a = e^{aLnz} \quad (z \neq 0)$$

a 为复数

当 a 为正整数 n 及分数 $\frac{1}{n}$ 时，z^a 就是 z 的 n 次乘幂及 n 次根，此时幂函数 z^a 分别为单值函数和 n 值函数。一般来说，幂函数 $\omega = z^a$ 是一个多值函数。当定义中对数函数取主值时，相应的幂函数也称其主值，幂函数的各个分支在除去原点及负实轴的复平面内也是解析的，且

$$(z^a)' = az^{a-1}$$

例3 证明函数$f(z)=x^3-y^3i$仅在原点有导数.

证

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x^3-y^3i}{x+iy}$$

$$=\lim_{(x,y)\to 0}(x^2-xyi-y^2)=0$$

故 $f(z)$ 在$z=0$处的导数为0.

再证其他处的导数不存在.

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{x^3+iy^3-x_0^3-iy_0^3}{(x+iy)-(x_0+iy_0)}$$

若z沿路径 $y=y_0$, 则

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}\to 3x_0^2 \quad (\text{当} x\to x_0)$$

若z沿路径 $x=x_0$, 则

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{-iy^3+iy_0^3}{i(y-y_0)}\to -3y_0^2 \quad (\text{当} y\to y_0)$$

故除非$x_0=y_0=0$,否则$f(z)$的导数不存在.

例4 函数 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$ 在何处可导，何处解析.

解 $u(x,y)=x^2-y^2-x$, $u_x=2x-1$, $u_y=-2y$;

$v(x,y)=2xy-y^2$, $v_x=2y$,$v_y=2x-2y$;

当且仅当 $y=\frac{1}{2}$ 时， $u_x=v_y$， $u_y=-v_x$.

故 $f(z)$ 仅在直线 $y=\frac{1}{2}$ 上可导.

由解析函数的定义知 $f(z)$ 在直线 $y=\frac{1}{2}$ 上处处不解析，故 $f(z)$ 在复平面上处处不解析.

例5 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

证 $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,$$

所以 $u=$ 常数, $v=$ 常数,

因此 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

参照以上例题可进一步证明:

如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则以下条件彼此等价.

(1) $f(z)=$ 恒取实值;

(2) $f'(z)=0$;

(3) $|f(z)|=$ 常数;

(4) $\overline{f(z)}$ 解析;

(5) $\mathrm{Re}[f(z)]=$ 常数;

(6) $\mathrm{Im}[f(z)]=$ 常数;

(7) $v=u^2$;

(8) $\arg f(z)=$ 常数.

例6 解方程 $\sin z = 0$

解 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{e^{2iz} - 1}{2ie^{iz}} = 0$

$$\Rightarrow e^{2iz} = 1$$

$$\Rightarrow e^{2iz} = e^{2k\pi i}$$

$$\Rightarrow z = k\pi. \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

例7 求下列各式的值：

$(1)\mathrm{Ln}(-2+3i)$； $(2)\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i)$； $(3)\mathrm{Ln}(-3)$.

解 $(1)\mathrm{Ln}(-2+3i)$

$$=\ln|-2+3i|+i\mathrm{Arg}(-2+3i)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 13+i\left(\pi-\arctan\frac{3}{2}+2k\pi\right).$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$(2)\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln\left|3-\sqrt{3}i\right|+i\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i\left(\arctan\frac{-\sqrt{3}}{3}+2k\pi\right)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right).\qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$(3)\mathrm{Ln}(-3)=\ln\left|-3\right|+i\mathrm{Arg}(-3)$$

$$=\ln 3+(2k+1)\pi i.\qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

例8 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i 的值和主值.

解 $1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1}=e^{2k\pi i\cdot\sqrt{2}}$

$=\cos(2\sqrt{2}k\pi)+i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$ 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

$i^i=e^{i\mathrm{Ln}i}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

例9、试证$f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$将z平面适当割开后能分出3个单值解析分支.并求出在$z=2$取负值的那个分支在$z=i$的值.

解、(1)当z单独绕包含原点的简单闭曲线一周时，

$f(z)$的辐角改变量为

$$\Delta\arg f(z)=\frac{1}{3}[\Delta\arg z+\Delta\arg(1-z)]=\frac{2}{3}\pi;$$

当z单独绕包含$z=1$的简单闭曲线一周时，

$f(z)$的辐角改变量为

$$\Delta\arg f(z)=\frac{1}{3}[\Delta\arg z+\Delta\arg(1-z)]=\frac{2}{3}\pi;$$

当z绕包含原点和$z=1$的简单闭曲线一周时，

时，$f(z)$的辐角改变量为

$$\Delta\arg f(z)=\frac{1}{3}[\Delta\arg z+\Delta\arg(1-z)]=\frac{4}{3}\pi.$$

因此,$0,1,\infty$都是$f(z)$的支点.将z平面沿正实轴从0到1割开，再沿负虚轴割开后，变点z就不能单独绕0或1转一周,也不能单独绕∞转一周了.于是，在这个区域内$f(z)$就分出了三个单值解析分支.

(2)当z从2出发沿不经过割线的曲线到i时，

z和$1-z$的辐角改变量分别为$\Delta\arg z=\dfrac{\pi}{2}$,

$\Delta\arg(1-z)=\dfrac{3}{4}\pi$.于是，$f(z)$的辐角改变量为

$$\Delta\arg f(z)=\frac{1}{3}[\Delta\arg z+\Delta\arg(1-z)]=\frac{5}{12}\pi.$$

因为$f(2)$取负值，所以可令$\arg f(2)=\pi$.

于是，有$f(i)=|f(i)|e^{i\arg f(i)}=|f(i)|e^{i[\arg f(2)+\Delta\arg f(z)]}$

$$=\sqrt[3]{|i||1-i|}e^{i(\pi+\frac{5}{12}\pi)}=-\sqrt[6]{2}e^{\frac{5}{12}\pi}.$$

第三章：复变函数的积分

- 复积分的定义 $\int_c f(z)dz = \lim\limits_{\delta \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$
- 复积分存在的条件

设函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在区域 D 内连续，曲线 C 光滑，则复积分存在，且

$$\int_c f(z)dz = \int_c udx - vdy + i\int_c vdx + udy$$

❖ 复积分的性质

1、 $\int_c f(z)dz = -\int_{c^-} f(z)dz$

2、 $\int_c kf(z)dz = -k\int_c f(z)dz$

3、 $\int_c [f(z) \pm g(z)]dz = \int_c f(z)dz \pm \int_c g(z)dz$

4、 $\left|\int_c f(z)dz\right| \le \int_c |f(z)|ds \le ML$

曲线 C 的长度为 L，函数在 C 上满足 $|f(z)| \le M$

❖ 复积分计算的一般方法

设 $f(z)$ 沿曲线 C 连续，曲线 C 的参数方程为 $z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$，其中起点为 $z(\alpha)$，终点为 $z(\beta)$，则

$$\int_c f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

$$\oint_\Gamma \frac{1}{(z-a)^n}dz=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\ne 1.\end{cases}$$

Γ 为含 a 的任一简单闭路.

复积分的基本定理

1 柯西—古萨基本定理 (柯西积分定理)

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, 那末函数 $f(z)$ 沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零: $\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

定理1 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, 那末积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与连结起点及终点的路线 C 无关.

2、复合闭路定理

设 C 为多连通区域 D 内的一条简单闭曲线，$c_1, c_2, \cdots c_n$ 为 C 内的简单闭曲线，它们互不包含又互不相交，并且以 $C, c_1, c_2, \cdots c_n$ 为边界的区域全部属于 D，如果 $f(z)$ 在 D 内解析，则

1. $$\oint_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{c_k} f(z)dz$$ 其中 C 与 C_k 均取正向

2. $$\oint_\Gamma f(z)dz = 0$$ 其中 Γ 是由 C 与 C_k^- 组成的复合闭路

3、牛顿－莱不尼茨公式

设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，$G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = G(z_2) - G(z_1)$$

4 柯西积分公式

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于 D，z_0 为 C 内任一点，那末

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

如果 C 是圆周 $z=z_0+R\cdot e^{i\theta}$，则有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\cdot e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

5 高阶导数公式

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶导数为：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (n=1,2,\cdots)$$

其中 C 为在函数 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部全含于 D.

6 调和函数和共轭调和函数

1） 如果二元实变函数 $\phi(x,y)$ 在区域 D内具有二阶连续偏导数, 并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,$$

那末称 $\phi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

任何在 **D** 内解析的函数, 它的实部和虚部都是 **D** 内的调和函数.

2)共轭调和函数

设 $u(x,y)$ 为区域 D 内给定的调和函数,我们把使 $u+iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x,y)$ 称为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

即在 D 内满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的两个调和函数中,v 称为 u 的共轭调和函数.

定理 区域D内的解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

3）由调和函数 $u(x,y)$ （或 $v(x,y)$ ）确定另一个调和函数或解析函数 $f(z)=u+iv$ 的方法：

* 偏微分法：从柯西－黎曼方程出发，解简单的一阶微分方程。

* 不定积分法：从 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}i$ 出发，将其写成 z 的函数，利用积分求出 $f(z)$。

例1 计算 $\int_C \mathrm{Re}\, z \mathrm{d}z$, 其中 C 为:

(1)从原点到点 $1+i$ 的直线段;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 $1+i$ 的弧段;

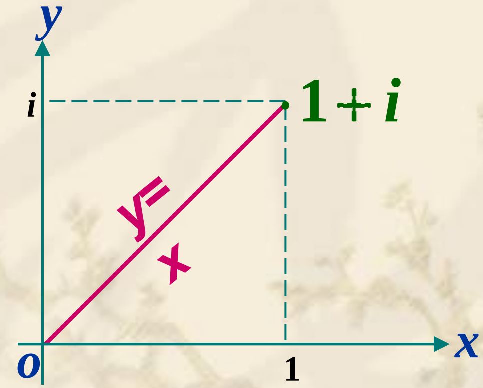
(3) 从原点沿 x 轴到点 1 再到 $1+i$ 的折线.

解 (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it \quad (0\le t\le 1),$$

于是 $\mathrm{Re}\, z=t,\quad \mathrm{d}z=(1+i)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\, z \mathrm{d}z=\int_0^1 t(1+i)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+i);$$



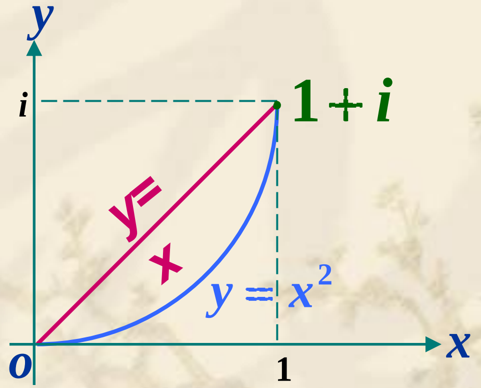
(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it^2 \quad (0\le t\le 1),$$

于是 $\operatorname{Re} z = t, \quad dz=(1+2ti)dt,$

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1+2it)dt$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{2i}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i;$$



(3) 积分路径由两段直线段构成

x轴上直线段的参数方程为 $z(t)=t \quad (0\le t\le 1)$,

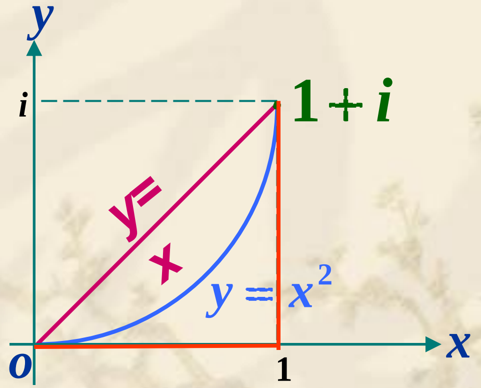
于是 $\operatorname{Re} z=t, \quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}t$,

1到1+i直线段的参数方程为$z(t)=1+it \ (0\le t\le 1)$,

于是 $\operatorname{Re} z=1, \quad \mathrm{d}z=i\mathrm{d}t$,

$$\int_C \operatorname{Re} z \mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_0^1 1\cdot i\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}+i.$$



例2　沿指定路径$C:|z-i|=\frac{3}{2}$计算以下积分

$$(1)\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z;\qquad (2)\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$$

解　(1) $\frac{1}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别

以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则

由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

解法一　利用柯西-古萨基本定理及重要公式

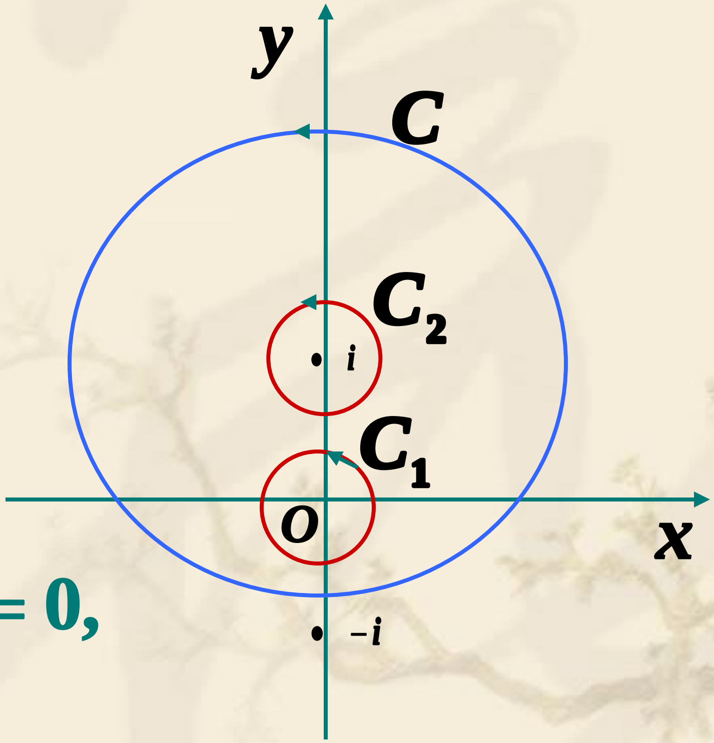
$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}$$

由柯西-古萨基本定理有

$$\oint_{C_1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=0,\quad \oint_{C_2}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=0,$$



$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z - \oint_{C_2} \frac{1}{2(z-i)}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i$$

$$= \pi i.$$

解法二　利用柯西积分公式

$f_1(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$在C_1内解析, $f_2(z)=\dfrac{1}{z(z+i)}$在C_2内解析,

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1}\frac{1/(z^2+1)}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1/[z(z+i)]}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot f_1(0)+2\pi i f_2(i)$$

$$=2\pi i+2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi i.$$

(2) $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别

以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$f_1(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$在$C_1$内解析,$f_2(z)=\dfrac{e^z}{z(z+i)}$在$C_2$内解析,

因此由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z/(z^2+1)}{z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z/[z(z+i)]}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \cdot f_1(0) + 2\pi i f_2(i)$$

$$= 2\pi i + 2\pi i\left(-\frac{e^i}{2}\right) = \pi i(2-e^i)$$

$$= \pi[\sin 1 + i(2-\cos 1)].$$

例3　计算$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$,其中$C$是不经过0与1的闭光滑曲线.

解　分以下四种情况讨论:

1)若封闭曲线C既不包含0也不包含1,则

$$f(z)=\frac{e^z}{z(1-z)^3}\text{在}C\text{内解析,}$$

由柯西–古萨基本定理得 $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=0.$

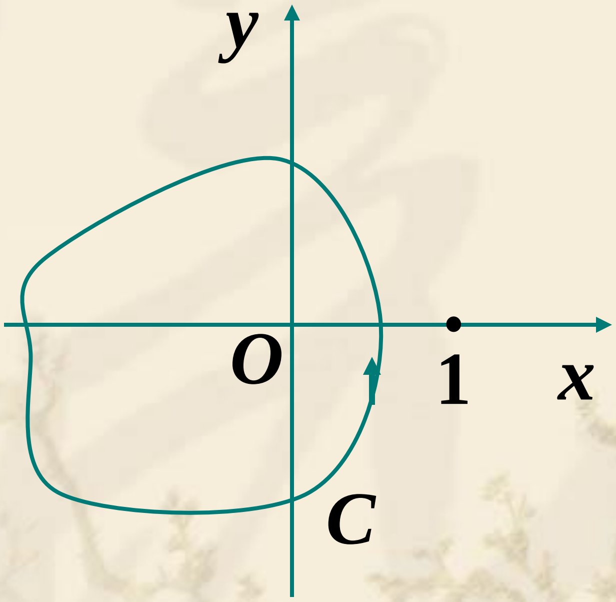
2)若封闭曲线C包含0而不包含1,则

$f(z)=\dfrac{e^z}{(1-z)^3}$在$C$内解析,由柯西积分公式得

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{e^z/(1-z)^3}{z}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{(1-z)^3}\right|_{z=0}$$

$$=2\pi i.$$



3)若封闭曲线C包含1而不包含0,则

$f(z)=\dfrac{e^z}{z}$在C内解析,　由高阶导数公式得

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{e^z/z}{(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{-e^z/z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[-f''(1)\right]$$

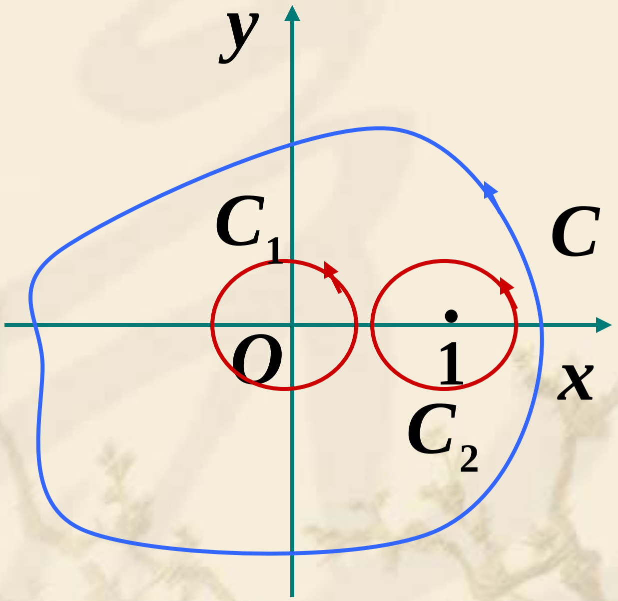
$$=\pi i\left.\frac{(z^2-2z+2)e^z}{-z^3}\right|_{z=1}=-e\pi i.$$

4)若封闭曲线C既包含1又包含0,

则分别以0,1为圆心,以$\rho > 0$为半径作圆C_1, C_2,

使C_1和C_2也在C内,且C_1与C_2互不相交,互不包含,

据复合闭路定理有



$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$$

而积分$\int_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$即为2)的结果$2\pi i$,

而积分$\int_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ 即为3)的结果$-e\pi i$,

所以 $\int_{C} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = (2-e)\pi i.$

例4 设 C 表示正向圆周 $|\xi|=3$,

$$f(z)=\oint_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,$$ 求 $f'(1+i)$.

解 根据柯西积分公式知, 当 z 在 C 内时,

$$f(z)=2\pi i\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\Big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

故 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$, 而 $1+i$ 在 C 内,

所以 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$.

例5　已知调和函数$u(x,y)=x^2-y^2+xy$.求其共轭调和函数$v(x,y)$及解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

解法一　不定积分法. 利用柯西—黎曼方程,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y+x)=2y-x,$$

得 $v=\int(2y-x)\mathrm{d}x=2xy-\frac{x^2}{2}+g(y),$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+g'(y).$$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y.$

比较两式可得：$2x+g'(y)=2x+y$，故 $g'(y)=y$.

即 $$g(y)=\int y\mathrm{d}y=\frac{y^2}{2}+C.$$

因此 $$v=2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C \quad (C\text{为任意常数})$$

因而得到解析函数

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y)+i(x,y) \\ &= (x^2-y^2+xy)+i\left(2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)+iC \\ &= (x^2+2ixy-y^2)-\frac{i}{2}(x^2+2ixy-y^2)+iC \\ &= \frac{z^2}{2}\cdot(2-i)+iC. \end{aligned}$$

解法二 全微分方法

由u,v可微，得

$$dv = v_x dx + v_y dy$$
$$= -u_y dx + u_x dy$$
$$= (2y - x)dx + (2x + y)dy$$

对上式从(0,0) 沿x轴到$(x,0)$,再从$(x,0)$沿直线到(x,y)积分得

$$v(x,y) = \int_0^x (-x)dx + \int_0^y (2x + y)dy + c_1$$
$$= 2xy - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c_1.(c_1\text{是任意实常数}$$

第四章：级数

❖ 复数项级数

1、复数列收敛⇔ 实部和虚部都收敛。

设 $\alpha_n = a_n + ib_n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a + ib \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

2、复级数收敛⇔实部级数与虚部级数都收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = s_1 + is_2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_1, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_2$$

3、复级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

❖ 幂级数

1、阿贝尔（Abel）定理

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-\alpha)^n$如果在 $z=z_0(\neq\alpha)$ 处收敛，则对满足$|z-\alpha|<|z_0-\alpha|$的 z，级数绝对收敛；如果在$z=z_1$处发散，则对满足$|z-\alpha|>|z_1-\alpha|$的 z，级数发散。

2、幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-\alpha)^n$收敛半径的求法

1）比值法　如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=\lambda$，则 $R=\frac{1}{\lambda}$

2）根值法　如果 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}=\mu$，则 $R=\frac{1}{\mu}$

3、幂级数的运算及性质

1）在收敛半径较小的区域内，幂级数可以进行加法、减法、乘法运算，利用乘法运算，可定义除法运算；幂级数也可以进行复合运算。

2）幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-\alpha)^n$的和函数 $f(z)$ 在收敛圆 $|z-\alpha|<R$ 内是解析函数；而且可逐项求导与逐项积分，收敛半径 R 不变。

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha_n(z-\alpha)^{n-1}, \quad \int_c f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}(z-\alpha)^{n+1}$$

❖ 泰勒（Taylor）级数

1、函数展开成泰勒级数

如果函数 $f(z)$ 在圆域 $|z-\alpha|<R$ 内解析，则函数在此圆内可以展开成幂级数，且展开式惟一。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

2、函数展开成泰勒级数的方法

1）直接法：利用泰勒级数公式，求各阶导数

2）间接法：利用已知级数，逐项积分或求导

常见函数的泰勒展开式

$$(1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$
$$(|z| < 1)$$

$$(4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$
$$(|z| < \infty)$$

$$(5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$(|z| < \infty)$$

$$(6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

$$(7)\ (1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

❖ 洛朗（Laurent）级数

1、函数展开成罗朗级数

如果函数 $f(z)$ 在圆环区域 $r<|z-\alpha|<R\ (r\geq 0, R\leq +\infty)$ 内解析，则在此区域内可以展开成洛朗级数，且展开式惟一。

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

Γ 为圆环内绕 α 的任意一条正向简单曲线。

函数展开成洛朗级数一般用间接方法

例1 判别级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+5i}{2}\right)^n$;

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$ 发散.

因为 $\left|\left(\frac{1+5i}{2}\right)^n\right|=\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^n\neq 0$,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+5i}{2}\right)^n$ 发散.

例2　求下列幂级数的收敛半径

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}\qquad(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\qquad(3)\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n$$

解 (1) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n^2}{(n+1)^2}\right|=1$, 得 $R=1.$

(2) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n!}{(n+1)!}\right|=0$, 得 $R=\infty.$

(3) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!}{n!}\right|=\infty$, 得 $R=0.$

例3 求函数 $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ 在 $|z|<1$ 内的泰勒展开式.

分析：利用逐项求导、逐项积分法.

解 因为 $\dfrac{1}{(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}[(1-z)^{-1}]''$ $\quad(|z|<1)$

所以 $\dfrac{1}{(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)''=\dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)z^m. \quad (|z|<1)$$

例4 求 $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 的去心邻域的洛朗级数.

解 在 $0<|z|<\infty$ 内,

因为 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$,

所以 $z^2 e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right)$

$=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\cdots+\frac{1}{n!z^{n-2}}+\cdots.$

例5 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数.

(1) $1<|z|<2$,　　　　(2) $2<|z|<\infty$.

解 (1) 在 $1<|z|<2$ 内, **有** $\left|\dfrac{i}{z}\right|<1$, $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$.

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-2)}=-\frac{1}{2+i}\cdot\left(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{2-z}\right)$$

$$=\frac{-1}{2+i}\cdot\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)}+\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}\right]=-\frac{1}{2+i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(2) 在 $2<|z|<\infty$ 内, $\left|\frac{i}{z}\right|<1,\quad \left|\frac{2}{z}\right|<1$

故 $f(z)=-\frac{1}{2+i}\left[\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-2}\right]$

$$=-\frac{1}{2+i}\left[\frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot z^{-n-1}\right]$$

$$=-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-i)^n-2^n\right]z^{-n-1}.$$

例6 将$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$展开为洛朗级数，圆环域为

（1）$0<|z-i|<2$ （2）$2<|z-i|<+\infty$

解 $$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+i}$$

（1）$0<|z-i|<2$

$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i+z-i}$$

$$=\frac{1}{2i(z-i)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{2i}}$$

$$= \frac{1}{2i(z-i)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$$

（2） $2 < |z-i| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i+z-i}$$

$$= \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-i}} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2i)^n}{(z-i)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2i)^n}{(z-i)^{n+2}}$$

第五.六章：奇点与留数

❖ 孤立奇点

1、孤立奇点分类：可去奇点、极点、本性奇点。

2、奇点的特征

1）可去奇点

孤立奇点 $a(\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 a 的去心邻域内的罗朗展开式中不含 $z-a$ 的负幂指数项 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)=b$ （有限数）

2）极点

孤立奇点 $a(\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的 m 级极点 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 a 的去心邻域内的罗朗展开式中只含有限个负幂指数项且关于 $(z-a)^{-1}$ 的最高幂为 m 次 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 a 的去心邻域内可表示为 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$

其中 $g(z)$ 在 a 点解析且 $g(a)\neq 0$

孤立奇点 a 为 $f(z)$ 的极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(z)=\infty$

（此特征没有指出极点的级数）

3）本性奇点

孤立奇点 $a(\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 a 的去心邻域内的罗朗展开式中含有无穷多个 $z-a$ 的负幂指数项 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(z)$ 不存在且不为无穷大。

4）零点与极点的关系

若不恒为零的解析函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内能表示为 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，m 为正整数，称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点。

z_0 为 $f(z)$ 的 n 级零点 $\Leftrightarrow$

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

不恒为零的解析函数的零点是孤立的。

z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点 $\Leftrightarrow$ z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级极点

综上所述:

孤立奇点	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m阶极点	含有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本质奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为∞

$$\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.\qquad \frac{\sin z}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots\qquad e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}.$$

0分别是 $\frac{\sin z}{z},\frac{\sin z}{z^2},\frac{e^z}{z^2},e^{\frac{1}{z}}$

的可去奇点、单极点、2阶极点及本质奇点。

5）函数在无穷远点的性态

函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的性态就是 $f(\frac{1}{t})$ 在 $t=0$ 的性态。

如果 $t=0$ 为 $f(\frac{1}{t})$ 的可去奇点、m 级极点、本性奇点，则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点、m 级极点、本性奇点。

$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点、极点、本性奇点

$\Leftrightarrow$分别为当$z\to\infty$时，$f(z)$的极限为有限数、无穷大、不为无穷大的不存在$\Leftrightarrow f(z)$在$r<|z|<+\infty$内罗朗展开式

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$$

中不含正幂项、含有有限个正幂项、含有无穷多个正幂项。

❖ 留数及其计算

1、定义

设 $a(\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则 $f(z)$ 在 a 点的留数

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}f(z)dz=c_{-1}$$

其中 c 是 a 的去心邻域内包含 a 的任意一条正向简单闭曲线。

2、留数的计算方法

1）利用罗朗展开式，求出$c_{-1}(z-a)^{-1}$的系数c_{-1}

2）讨论奇点的类型

♣ 如果 a 是可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z),a]=0$

♣ 如果 a 是本性奇点，只能利用罗朗展开式求它的留数。

♣ 如果 a 是极点，可利用下面规则

规则 1　如果 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$$

特别的，当 $m=1$ 时，$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$

当 $m=2$ 时，$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim\limits_{z\to a}[(z-a)^2 f(z)]'$

规则 2　设 a 为 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点

（只要 $P(z)$与 $Q(z)$在点 a 解析，且 $P(a)\neq 0$

$Q(a)=0$，$Q'(a)\neq 0$），则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\frac{P(a)}{Q'(a)}$$

3 无穷远点的留数

定义　设函数 $f(z)$在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内解析

C为圆环域内绕原点的任何一条正向简单闭曲线

那末积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 的值与C无关，则称此定值为 $f(z)$在 ∞ 的留数.

记作 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z$

也可定义为 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-C_{-1}.$

❖ 留数定理

定理 1　设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除去有限个孤立奇点 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 外处处解析，c 是 D 内包含诸奇点的一条正向简单曲线，它的内部全部含于 D，则

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$$

定理 2　若函数 $f(z)$ 在扩充复平面上只有有限个孤立奇点（含 ∞ 点），设为 $a_1,a_2,\cdots a_n,\infty$ 则

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]=0$$

在无穷远点处留数的计算

规则3 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

计算函数沿闭曲线积分的又一种方法:

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

此法在很多情况下此法更为简单.

例1 计算积分 $\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$, C为正向圆周: $|z|=2$.

解　$z=0$ 为一阶极点，　$z=1$为二阶极点，

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz = -2$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{2}{z^2} = 2$$

所以 $\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz = 2\pi i(-2+2) = 0.$

例2　求下列函数$f(z)$在扩充复平面上的奇点,并判别类型.

$$\frac{\sin z - z}{z^3};$$

解　(1)由于$f(z)$在$0<|z|<+\infty$内的洛朗展式为:

$$f(z)=\frac{\sin z - z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left[\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)-z\right]$$

$$=-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\frac{z^6}{9!}-\cdots$$

得$z=0$是$f(z)$的可去奇点,$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点.

例3　求下列积分

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz \qquad \oint_{|z|=n} \tan \pi z dz \qquad \oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z^2}} \mathrm{d}z.$$

例4　求下列各函数在有限奇点处的留数.

$$(1)\sin\frac{1}{z-1},\quad (2)z^2\sin\frac{1}{z},\quad (3)\frac{1}{z\sin z},$$

解　(1)在 $0<|z-1|$内,$+\infty$

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots,$$

所以　$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\sin(z-1)},1\right]=C_{-1}=1.$

(2) $z^2\sin\frac{1}{z}$

解　因为 $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$

所以在 $0 < |z| < +\infty$ 内，

$$z^2\sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots\right)$$

$$= z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \cdots$$

故　$\operatorname{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z}, 0\right] = C_{-1} = -\frac{1}{6}.$

(3) $\dfrac{1}{z\sin z}$

解　$z = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为奇点,

当 $n \neq 0$ 时　$n\pi$ 为一级极点,

因为 $\lim\limits_{z\to n\pi}(z - n\pi)\dfrac{1}{z\sin z}$

$$= \lim_{z\to n\pi}(-1)^n \frac{z - n\pi}{z\sin(z - n\pi)} = (-1)^n \frac{1}{n\pi},$$

由　$\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z} = 1$, 知$z = 0$是二级极点.

所以 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{z\sin z}, n\pi\right] = (-1)^n \dfrac{1}{n\pi}$,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\sin z}, 0\right] = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right]$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$= 0.$$

例5 $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}\mathrm{d}z.$

解　在 $3<|z|<+\infty$ 内，

$$f(z)=\frac{z^{13}}{z^6\left(1+\dfrac{5}{z^2}\right)^3\cdot z^8\left(1+\dfrac{1}{z^4}\right)^2}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1+\dfrac{5}{z^2}}\right]^3\left[\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{5}{z^2}+\frac{25}{z^4}-\cdots\right)^3\left(1-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^8}-\cdots\right)^2$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{15}{z^2} + \cdots\right)\left(1 - \frac{2}{z^4} + \cdots\right) = \frac{1}{z} + \cdots,$$

所以 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -C_{-1} = -1,$

故 $$\oint_{|z|=3} \frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2} dz = 2\pi i[-(-1)]$$

$$= 2\pi i.$$

此题可直接利用规则3计算。

例6　计算 $\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz.$

解　$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

$$\sum_{k=1}^{5} \mathrm{Res}[f(z), z_k] = -\left\{ \mathrm{Res}[f(z), 3] + \mathrm{Res}[f(z), \infty] \right\}$$

$$\mathrm{Res}[f(z), 3] = \lim_{z \to 3} (z-3) \cdot \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{242},$$

$$\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}=\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)\cdot z^5\left(1-\frac{1}{z^5}\right)}$$

$$=\frac{1}{z^6}\left(1+\frac{3}{z}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z^5}+\cdots\right),$$

所以 $\text{Res}[f(z),\infty]=0,$

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\cdot\frac{1}{242}=-\frac{\pi i}{121}.$$