

2024 阿里巴巴全球数学竞赛

问题1

几位同学假期组成一个小组去某市旅游. 该市有6座塔, 它们的位置分别为 A, B, C, D, E, F . 同学们自由行动一段时间后, 每位同学都发现, 自己在所在的位置只能看到位于 A, B, C, D 处的四座塔, 而看不到位于 E 和 F 的塔. 已知

- (1) 同学们的位置和塔的位置均视为同一平面上的点, 且这些点彼此不重合;
- (2) A, B, C, D, E, F 中任意3点不共线;
- (3) 看不到塔的唯一可能就是视线被其它的塔所阻挡, 例如, 如果某位同学所在的位置 P 和 A, B 共线, 且 A 在线段 PB 上, 那么该同学就看不到位于 B 处的塔.

请问, 这个旅游小组最多可能有多少名同学?

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 12

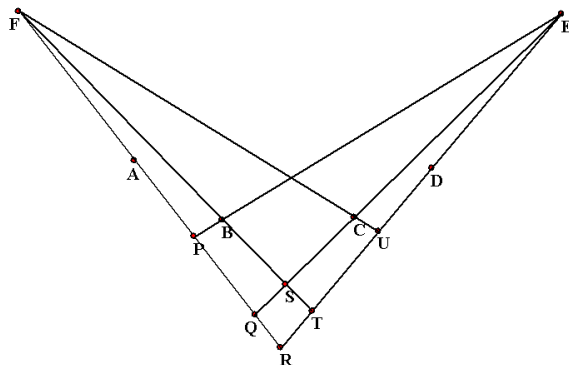
答案1

(C). 由于任意三座塔的位置不共线, 所以对任意一位同学来说, E 和 F 处的塔必然是被两座不同的塔所阻挡了视线.

我们任取前面的2座塔 (不妨设为 A 处和 B 处的塔), 假设一位同学的视线是被这2座塔阻挡, 那么该同学的位置或者是 EA 的延长线和 FB 的延长线的交点, 或者是 EB 的延长线和 FA 的延长线的交点.

然而, 如果 EA 的延长线和 FB 的延长线有交点, 那么 $AEFB$ 是一个凸四边形, 这意味着 EB 和 FA 的交点在这两条线段的内部. 因此, 被 A 处和 B 处的塔阻挡住视线的同学最多有一位.

由于在前4座塔中选取2座塔的方式有6种, 所以同学的数目不超过6. 下图是一个取到6的例子 (P, Q, R, S, T, U 是同学们的位置).



问题2

小明玩战机游戏。初始积分为2。在游戏进行中，积分会随着时间线性地连续减少(速率为每单位时间段扣除1)。游戏开始后，每隔一个随机时间段(时长为互相独立的参数为1 的指数分布)，就会有一架敌机出现在屏幕上。当敌机出现时，小明立即进行操作，可以瞬间击落对方，或者瞬间被对方击落。如被敌机击落，则游戏结束。如小明击落敌机，则会获得1.5个积分，并且可以选择在击落该次敌机后立即退出游戏，或者继续游戏。如选择继续游戏，则须等待到下一架敌机出现，中途不能主动退出。游戏的难度不断递增：出现的第 n 架敌机，小明击落对方的概率为 $(0.85)^n$ ，被击落的概率为 $1 - (0.85)^n$ ，且与之前的事件独立。在任何时刻，如果积分降到0，则游戏自动结束。

问题部分：

- (1) 如果游戏中，小明被击落后，其之前的积分保持。那么为了游戏结束时的累积积分的数学期望最大化，小明应该在其击落第几架敌机后主动结束游戏？
 - (A) 1.
 - (B) 2.
 - (C) 3.
 - (D) 4.
- (2) 假设游戏中，小明被击落后，其之前积累的积分会清零。那么为了结束时的期望积分最大化，小明也会选择一个最优的时间主动结束游戏。请问在游戏结束时(小明主动结束、或积分减到0)，下列哪一个选项最接近游戏结束时小明的期望积分？
 - (A) 2.
 - (B) 4.
 - (C) 6.
 - (D) 8.

答案2

敌机的出现是一个参数为1 的泊松点过程(如需避免连续时间随机过程，这里也可用指数分布的无记忆性)。在任意时刻，每进行一个单位时间段，小明减少的积分为1。在击落每架敌机后，小明增加的积分为1.5。在这之后，每进行一个单位时间段，小明击落敌机的期望收益为 $1.5 \times (0.85)^n$ 。

- (1) 在这种情况下，被敌机击落的期望损失为0。那么我们选择最大的 n ，使得 $1.5 \times (0.85)^n > 1$ ，即 $n = 2$ 。小明在击落第2架敌机时主动结束游戏。因此选(B)。

- (2) 假设击落第 $n - 1$ 架敌机后，小明所拥有的积分为 t 。如选择继续等待到下一架敌机出现后结束游戏，积分的数学期望为

$$(0.85)^n \times \int_0^t (t + 1.5 - x)e^{-x} dx = (0.85)^n \times (t + 0.5 \times (1 - e^{-t})) . \quad (1)$$

当 $n = 1$ 且 $t \leq 2$ 时，上式总是大于 t 。因此小明至少要等到第一架敌机出现。假如小明击落了第一架敌机，那么其手中积分至少为 1.5。当 $n = 2$ 且 $t \geq 1.5$ 时，(1) 总是小于 t 。因此，假设小明已经击落了第一架敌机，那么选择“立即结束游戏”总是优于“击落第二架敌机后立即结束”。由第一问可知，无论小明现有积分为多少，其最优结束时间都应该不晚于击落第二架敌机。综上可得，小明的最优策略为：等待第一架敌机出现，将其击落后立即结束游戏。

在此策略下，小明最终积分的期望应为(1) 式在 $n = 1$ 及 $t = 2$ 时的值，约为 2.067。最接近的选项为(A)。

www.bjcugb.com
北地论坛 北地人的精神家园！

问题3

对于实数 $T > 0$, 称欧氏平面 \mathbb{R}^2 的子集 Γ 为 T -稠密的, 如果对任意 $v \in \mathbb{R}^2$, 存在 $w \in \Gamma$ 满足 $\|v - w\| \leq T$. 设2阶整方阵 $A \in M_2(\mathbb{Z})$ 满足 $\det(A) \neq 0$.

(1) 假设 $\text{tr}(A) = 0$. 证明存在 $C > 0$, 使得对任意正整数 n , 集合

$$A^n \mathbb{Z}^2 := \{A^n v : v \in \mathbb{Z}^2\}$$

是 $C|\det(A)|^{n/2}$ -稠密的.

(2) 假设 A 的特征多项式在有理数域上不可约. 证明与(1)相同的结论.

注: 这里 \mathbb{R}^2 和 \mathbb{Z}^2 中的向量约定为列向量, \mathbb{R}^2 中的内积为标准内积, 即 $\langle v, w \rangle = v^t w$.

(提示: 在对(2)的证明中, 可使用如下Minkowski凸体定理的特殊情形: \mathbb{R}^2 中以原点为中心且面积为4的任意闭平行四边形中总包含 \mathbb{Z}^2 中的非零向量.)

答案3

记 $t = \text{tr}(A)$, $d = \det(A)$. 则 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + d$. 由Cayley - Hamilton定理, $\chi_A(A) = 0$, 即 $A^2 = tA - dI_2$. 下面分两步证明.

第一步. 先证明: 在(1)或(2)的条件下, 对任意正整数 n , 存在不全为零的整数 p_n, q_n 和区间 $[-1, 1]$ 中的实数 x_n, y_n , 使得

$$p_n A^{n+1} + q_n A^n = |d|^{n/2} (x_n A + y_n I_2), \quad (2)$$

并且(2)式两边为可逆矩阵.

- 假设(1)的条件成立, 即 $t = 0$. 则 $A^2 = -dI_2$.
 - 若 n 为偶数, 则 $A^n = (-d)^{n/2} I_2$, 即(2)式对 $p_n = 0, q_n = 1, x_n = 0, y_n = \text{sgn}((-d)^{n/2})$ 成立. 此时(2)式两边可逆.
 - 若 n 为奇数, 则 $A^n = (-d)^{(n-1)/2} A$, 即(2)式对 $p_n = 0, q_n = 1, x_n = \text{sgn}((-d)^{(n-1)/2})|d|^{-1/2}, y_n = 0$ 成立. 此时(2)式两边也可逆.
- 假设(2)的条件成立, 即 $\chi_A(\lambda)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约. 由 $A^2 = tA - dI_2$ 可知, 对任意 $n \geq 0$, 存在 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ 使得 $A^n = a_n A + b_n I_2$, 并且由于 A 与 I_2 线性无关, a_n 与 b_n 被 n 唯一决定. 为了得到进一步的信息, 注意到

$$a_{n+1} A + b_{n+1} I_2 = A^{n+1} = A(a_n A + b_n I_2) = a_n (tA - dI_2) + b_n A = (ta_n + b_n) A - da_n I_2.$$

这推出 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. 从而对 $n \geq 1$ 有

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -d & 0 \end{pmatrix}^n.$$

特别地, $\det \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix} = d^n$. 考虑以原点为中心的闭平行四边形

$$\Delta_n := \left\{ |d|^{n/2} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in [-1, 1] \right\}.$$

由于矩阵 $|d|^{n/2} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix}^{-1}$ 的行列式为 ± 1 , 所以 Δ_n 的面积为 4. 由 Minkowski 凸体定理, Δ_n 中存在非零整点, 即存在 $x_n, y_n \in [-1, 1]$ 和不全为零的 $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = |d|^{n/2} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

这推出

$$\begin{aligned} p_n A^{n+1} + q_n A^n &= p_n (a_{n+1} A + b_{n+1} I_2) + q_n (a_n A + b_n I_2) \\ &= (p_n a_{n+1} + q_n a_n) A + (p_n b_{n+1} + q_n b_n) I_2 \\ &= |d|^{n/2} (x_n A + y_n I_2), \end{aligned}$$

即(2)式成立. 另外, 由于 $\chi_A(\lambda)$ 在 \mathbb{Q} 上不可约, 所以 A 在 \mathbb{Q} 中无特征值. 这推出 $p_n A + q_n I_2$ 可逆, 从而(2)式两边的矩阵可逆.

第二步. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. 我们证明

$$C := \left((|a_{11}| + 1)^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + (|a_{22}| + 1)^2 \right)^{1/2}$$

满足要求. 首先, 容易验证, 对任意 $x, y \in [-1, 1]$ 和 $u \in \mathbb{R}^2$, 有 $\|(xA + yI_2)u\| \leq C\|u\|$. 设 $n \geq 1$, $v \in \mathbb{R}^2$. 记

$$v' = |d|^{-n/2} (x_n A + y_n I_2)^{-1} v.$$

取 $w' \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $\|v' - w'\| \leq 1$, 并取

$$w = |d|^{n/2} (x_n A + y_n I_2) w' = A^n (p_n A + q_n I_2) w' \in A^n \mathbb{Z}^2.$$

则

$$\|v - w\| = |d|^{n/2} \|(x_n A + y_n I_2)(v' - w')\| \leq C|d|^{n/2}.$$

这就完成了证明. □

问题4

设 $d \geq 0$ 是整数, V 是 $2d+1$ 维复线性空间, 有一组基

$$\{v_1, v_2, \dots, v_{2d+1}\}.$$

对任一整数 j ($0 \leq j \leq \frac{d}{2}$), 记 U_j 是

$$v_{2j+1}, v_{2j+3}, \dots, v_{2d-2j+1}$$

生成的子空间. 定义线性变换 $f: V \rightarrow V$ 为

$$f(v_i) = \frac{(i-1)(2d+2-i)}{2}v_{i-1} + \frac{1}{2}v_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2d+1.$$

这里我们约定 $v_0 = v_{2d+2} = 0$.

- (1) 证明: f 的全部特征值为 $-d, -d+1, \dots, d$.
- (2) 记 W 是从属于特征值 $-d+2k$ ($0 \leq k \leq d$) 的 f 的特征子空间的和. 求 $W \cap U_0$ 的维数.
- (3) 对任一整数 j ($1 \leq j \leq \frac{d}{2}$), 求 $W \cap U_j$ 的维数.

答案4

在 $M_2(\mathbb{C})$ 中, 令

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算得

$$[h_0, x_0] = h_0 x_0 - x_0 h_0 = 2x_0,$$

$$[h_0, y_0] = h_0 y_0 - y_0 h_0 = -2y_0,$$

$$[x_0, y_0] = x_0 y_0 - y_0 x_0 = h_0.$$

记

$$T = \exp\left(\frac{\pi}{4}(x_0 - y_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

计算得 $T(x_0 + y_0)T^{-1} = h$.

(1) 定义线性变换 $h, x, y: V \rightarrow V$ 如下:

$$x(v_i) = v_{i+1}, \quad y(v_i) = (i-1)(2d+2-i)v_{i-1}, \quad h(v_i) = 2(i-d-1)v_i.$$

计算得

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h.$$

定义映射 $\phi: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 为

$$\phi(h_0) = h, \quad \phi(x_0) = x, \quad \phi(y_0) = y.$$

则 ϕ 是一个李代数同态. 类似于 T 的定义, 记 $S = \exp(\frac{\pi}{4}(x - y))$, 则 $S(x + y)S^{-1} = h$. 所以, $f = \frac{1}{2}(x + y)$ 与 $\frac{1}{2}h$ 共轭. 这样, f 的特征值与 $\frac{1}{2}h$ 的相同, 也是 $-d, -d + 1, \dots, d$.

(2) 记 $A = \exp(\pi i f)$, $B = \exp(\frac{\pi i}{2}h)$. 则 W 是属于特征值 $(-1)^d$ 的 A 的特征子空间, U_0 是属于特征值 $(-1)^d$ 的 B 的特征子空间. 以上同态 ϕ 是某个李群同态 $\Phi: \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 的微分. 在 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 中, 我们有

$$A_0 := \exp(\pi i f_0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

及

$$B_0 := \exp(\frac{\pi}{2} i h_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

注意

$$A_0^2 = B_0^2 = A_0 B_0 A_0^{-1} B_0^{-1} = -I \text{ and } A_0 \sim B_0 \sim A_0 B_0.$$

由于 $\Phi(-I) = 1$, 所以 A 和 B 是 $\mathrm{GL}(V)$ 中交换的对合子, 且 $A \sim B \sim AB$. 当 d 是偶数时, 我们有

$$\dim W \cap U_0 = \frac{1}{2}(3 \dim V^A - \dim V) = \frac{1}{2}(d + 2).$$

当 d 是奇数时, 我们有

$$\dim W \cap U_0 = \frac{1}{2}(\dim V - \dim V^A) = \frac{1}{2}(d + 1).$$

(3) 我们有 $U_{\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor} = 0$. 因此, $\dim W \cap U_{\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor} = 0$. 有以上(2)中结论, $\dim W \cap U_0 = \lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor$. 只需证明: 对任意的 j ($0 \leq j \leq \frac{d}{2}$), 我们有

$$\dim W \cap U_j - \dim W \cap U_{j+1} \leq 1.$$

这样,

$$\dim W \cap U_j = \lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor - j.$$

由于 $\mathrm{Ad}(A_0)x_0 = y_0$ 以及 $\mathrm{Ad}(A_0)y_0 = x_0$, 我们得到 $\mathrm{Ad}(A)x = y$ 和 $\mathrm{Ad}(A)y = x$. 我们也有 $\mathrm{Ad}(A_0)^{-1}h_0 = -h_0$. 因此, $\mathrm{Ad}(A)^{-1}h = -h$. 记 $u_0 = v_{d+1}$, 它是 h 的 0-特征子空间的生成元. 由于 $\mathrm{Ad}(A)^{-1}h = -h$, 得 $h(Au_0) = -A(hu_0) = 0$. 因此, Au_0 也是 h 的 0-特征向量. 这样, $Au_0 = tu_0$, $t \neq 0$. 由于 $A^2 = 1$, 必有 $t = \pm 1$. 对任意 $j \leq \frac{d}{2}$, $v_{2d+1-2j} = x^{d+1-2j}u_0$, 而 v_{2j+1} 与 $y^{d+1-2j}u_0$ 成比例. 这样, A 的作用交换 v_{2j+1} 和 $c_j v_{2d+1-2j}$, c_j 是某个非零常数. 因此, $\dim W \cap U_j - \dim W \cap U_{j+1} \leq 1$.

问题5

对于 \mathbb{R}^3 中的任何中心对称的凸多面体 V , 证明可以找到一个椭球面 E , 把凸多面体包在内部, 且 E 的表面积不超过 V 的表面积的3倍.

答案5

我们可以证明下述一般的结论:

(1) 设 V 是 \mathbb{R}^3 中的一个关于原点对称的非空有界凸开集. 在所有关于原点对称且包含 V 的椭球面 E 中, 存在唯一一个 E_0 , 使得其包围的体积取到最小值.

我们知道, \mathbb{R}^3 中关于原点对称椭球与3元正定二次型一一对应. 我们记三元(半)正定二次型全体为 Q_+ , 对于 $q \in Q_+$, 它对应的(可能退化的)椭球为 $\{q(x, x) \leq 1\}$.

注意到凸集 V 唯一对应到 \mathbb{R}^3 的一个范数 N (这样 $V = \{x, N(x) < 1\}$). 包含 V 的(可能退化的)椭球面 E 对应的三元二次型全体就是

$$K = \{q \in Q_+, 0 \leq q(x, x) \leq (N(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}^3\}.$$

我们容易看到:

- K 不是空集;
- K 作为 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ (赋予欧氏度量决定的拓扑)中的子集是一个有界闭集, 从而是紧的;
- K 是一个凸集(若 $0 \leq q_1(x, x), q_2(x, x) \leq (N(x))^2$, 则对于任意 $\lambda \in [0, 1]$, $0 \leq \lambda q_1(x, x) + (1 - \lambda)q_2(x, x) \leq (N(x))^2$).

我们记 $v(q) = \text{椭球}\{q(x, x) \leq 1\}$ 的体积, 这是 K 上的一个连续函数(三个特征值乘积的倒数, 注意这是无上界的), 由 K 的紧性可知存在 q_N , 使得 $v(q_N)$ 取到最小值.

现在假设另有一个 q' 使得 $v(q') = v(q_N)$, 我们要说明 $q' = q_N$. 为此, 我们利用等式

$$\iiint e^{-q(x, x)} d^3x = \frac{3}{2}v(q) \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t} dt,$$

和指数函数的凸性, 可得

$$I(q) := \iiint e^{\frac{-q'(x, x) - q_N(x, x)}{2}} d^3x \leq \frac{1}{2} \left(\iiint e^{-q'(x, x)} d^3x + \iiint e^{-q_N(x, x)} d^3x \right)$$

从而存在唯一一个(对应于 q_N 的) E_0 , 使得体积取到最小值.

(2) 我们还有 $E_0 \subset \sqrt{3}V$.

椭球面 E_0 上, 我们取一点使得 $N(x)$ 达到最大值的点 a . 容易看到

- 椭球面 E_0 在 a 点处的切平面 Π 与 E_0 只有一个公共点 a ;
- 我们定义 $H = \{y, q_N(a, y) = 0\}$, 则 $\Pi = a + H$;
- 对于 $y \in H, t \in \mathbb{R}$, 定义 $\varphi(t) = N(a + ty)$, 由范数的性质, 这是一个凸函数, 且满足 $\varphi(t) \leq N(a) \sqrt{1 + t^2} q_N(y, y)$;
- 由此, 我们得到 φ 的最小值在 $t = 0$ 时取到. 如果我们对于任意 $x \in \mathbb{R}^3$, 定义(关于 q_N 的)向 H 的正交投影 $\pi_H(x)$, 以及 $\pi_a(x) = x - \pi_H(x)$, 那么就有 $N(\pi_a(x)) \leq N(x)$;
- 现在对于 $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ 定义

$$q(x, x) = (1 + \varepsilon)q_N(\pi_a(x), \pi_a(x)) + (1 - \delta)q_N(\pi_H(x), \pi_H(x)),$$

我们有 $q \in Q_+$, 且 $I(q) = (1 + \varepsilon)^{-1/2}(1 - \delta)^{-1}I(q_N)$;

- 对于任意 $x \in \mathbb{R}^3$, 有 $q_N(\pi_a(x), \pi_a(x)) + q_N(\pi_H(x), \pi_H(x)) = q_N(x, x) \leq N^2(x)$, 故

$$\begin{aligned} q(x, x) &= (1 - \delta)(q_N(\pi_a(x), \pi_a(x)) + q_N(\pi_H(x), \pi_H(x))) + (\delta + \varepsilon)q_N(\pi_a(x), \pi_a(x)) \\ &\leq N^2(x) - \left[\delta - \frac{\delta + \varepsilon}{N^2(a)} \right] N^2(x). \end{aligned}$$

- 如果 $N^2(a) > 3$, 那么可以取适当的 $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ 使得 $\left[\delta - \frac{\delta + \varepsilon}{N^2(a)} \right] \geq 0$ 且 $(1 + \varepsilon)^{-1/2}(1 - \delta)^{-1} < 1$, 这意味着 $I(q) < I(q_N)$, 矛盾.

因此 $N^2(a) \leq 3$, 即 $E_0 \subset \sqrt{3}V$.

上述(1)+(2)是二十世纪四十年代Fritz John证明的定理.

现在, 对于我们所考虑的凸多面体 V , 这个定理告诉我们, 对于相应的椭球面 E_0 , 成立 $\frac{1}{\sqrt{3}}E_0 \subset V$. 这样, 由于凸体的表面积具有单调性(可以用关于凸体表面积的一般的Cauchy积分公式, 也可以利用这里只涉及一个光滑的椭球面和一个多面体来直接证明), 我们就有

$$\frac{1}{\sqrt{3}}E_0 \text{ 的表面积} \leq V \text{ 的表面积},$$

从而

$$E_0 \text{ 的表面积} \leq 3 \times V \text{ 的表面积}.$$

说明: 这里的3当然(远)不是最优的.

问题6

- (1) 假设有一枚硬币，投掷得到正面的概率为 $1/3$ 。独立地投掷该硬币 n 次，记 X_n 为其中得到正面的次数。试求 X_n 为偶数的概率在 n 趋于无穷时的极限，即：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \text{ 为偶数})$$

- (2) 某人在过年期间参加了集五福活动，在这项活动中此人每扫描一次福字，可以随机地得到五张福卡中的一张。假设其每次扫福得到五福之一的概率固定，分别为 $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ ($\sum_{i=1}^5 p_i = 1$)，并假设其每次扫描得到的结果相互独立。在进行 n 次扫福之后，记 $X_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, 5$ 为其得到每种福卡的张数。试求以下极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{2n}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, 5 \text{ 全部为偶数})$$

[Note: 这一题目由2023年秋某次与北京市明诚外国语学校蔡桥老师讨论的题目改编而来。蔡老师虽然完全不知悉本比赛命题事宜，但对于本题有显著贡献]

答案6

1. 考虑按照第一次投掷的正反来进行分类：

- 如果第一次投掷的结果为正面，则需要此后 $n-1$ 次出现正面的总次数为奇数；
- 反之，则需要此后 $n-1$ 次出现正面的总次数为偶数。

记 $p_n = P(X_n \text{ 为偶数})$ ，根据全概率公式我们有

$$p_n = \frac{1}{3} \times (1 - p_{n-1}) + \frac{2}{3} \times p_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{p_{n-1}}{3}$$

因此

$$\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \times \left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

成为一个压缩映射，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$ 。

2. 在第一问的基础上，令 $p_n(q)$ 为正面概率为 q 时 n 次投掷得到偶数个正面的概率。通过与上一问相同的计算易见对于一切 $q \neq \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(q) = \frac{1}{2}$ 。当 $q = \frac{1}{2}$ 时，我们同理有

$$p_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times [1 - p_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)] + \frac{1}{2} \times p_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \frac{1}{2}$$

因此我们即得到了“只有两种不同福卡”情形下的概率极限。下面考虑三种不同福卡，其概率分别为 p_1, p_2, p_3 。注意到此时三种福卡各自的张数 (X_1, X_2, X_3) 服从参数

为 $(2n, p_1, p_2, p_3)$ 的多项分布。1号福卡的张数 X_1 服从参数为 $(2n, p_1)$ 的二项分布。此外，给定 $X_1 = n_1$ 的前提下， X_2 的条件分布服从参数为 $(2n - n_1, \frac{p_2}{p_2 + p_3})$ 的二项分布。

记我们关心的事件为 $A_{2n}^{(3)}$ ”再次利用全概率公式，我们有

$$P(A_{2n}^{(3)}) = \sum_{k=0}^n P(X_1 = 2k) p_{2n-2k} \left(\frac{p_2}{p_2 + p_3} \right) \quad (3)$$

注意到我们已经证明了 $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m \left(\frac{p_2}{p_2 + p_3} \right) = 1/2$ 。对于一切 $\epsilon > 0$ 存在整数 M_1 使得

$$p_m \left(\frac{p_2}{p_2 + p_3} \right) \in (1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon), \quad \forall m \geq 2M_1$$

同时，存在 N_1 使得

$$p_m(p_1) \in (1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon), \quad \forall m \geq 2N_1$$

最后对于已确定的 M_1 ，注意到 X_1 服从参数为 $(2n, p_1)$ 的二项分布。使用切比雪夫不等式可知对上述 $\epsilon > 0$ 存在 N_2 使得对任意 $n \geq N_2$ ，有

$$P(X_1 \geq 2n - 2M_1) < \epsilon$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，根据(3)有，对任意的 $n \geq N$

$$\begin{aligned} P(A_{2n}^{(3)}) &= \sum_{k=0}^n P(X_1 = 2k) p_{2n-2k} \left(\frac{p_2}{p_2 + p_3} \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-M} P(X_1 = 2k) p_{2n-2k} \left(\frac{p_2}{p_2 + p_3} \right) + P(X_1 \geq 2n - 2M) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \sum_{k=0}^{n-M} P(X_1 = 2k) + \epsilon \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) p_{2n}(p_1) + \epsilon \leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right)^2 + \epsilon \end{aligned}$$

与此同时，

$$\begin{aligned} P(A_{2n}^{(3)}) &= \sum_{k=0}^n P(X_1 = 2k) p_{2n-2k} \left(\frac{p_2}{p_2 + p_3} \right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-M} P(X_1 = 2k) p_{2n-2k} \left(\frac{p_2}{p_2 + p_3} \right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \sum_{k=0}^{n-M} P(X_1 = 2k) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) [p_{2n}(p_1) - P(X_1 \geq 2n - 2M)] \geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon \right) \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性，易见 $P(A_{2n}^{(3)}) \rightarrow 1/4$ 。因此，我们即可以递归地证明 $P(A_{2n}^{(5)}) \rightarrow 2^{-4}$ ，证毕。 \square

问题7

有这么一个音乐盒，它上面有一个圆形的轨道，轨道上的一点处还有一棵开花的树。当音乐盒处于开启模式时，音乐盒会发出音乐，轨道会按照顺时针匀速转动。

你可以在轨道上放置象征恋人的两颗棋子，我们不妨称它们为小红和小绿。当小红和小绿没有到达树下时，它们就会在轨道上各自移动。当某一颗棋子到达树下时，它就会在树下原地等待一段时间。此段时间内，如果另外一颗棋子也达到了树下，那么两颗棋子就会相遇，之后在它们将随即一起顺着轨道移动，不再分开；否则，等待时间结束，两颗棋子将各自顺着轨道继续移动。

考虑这个音乐盒的数学模型。我们把这个圆形轨道参数化成一个周长为1的圆环，我们认为棋子和树都可以用圆环上点表示。具体来说，我们用 $X(t) \in [0, 1]$ 和 $Y(t) \in [0, 1]$ 分别表示 t 时刻小红和小绿的在轨道上的位置坐标，而树的坐标是 $\phi = 1$ ，或者，等价地， $\phi = 0$ 。

当他们都没有抵达树下时（见左图），他们的位置变化规律满足

$$\frac{d}{dt}X(t) = 1, \quad \frac{d}{dt}Y(t) = 1.$$

假设在 t_0 时刻，小绿到达了树下（见中图），即 $Y(t_0) = 1$ ，它就会至多等待

$$\tau = K(X(t_0))$$

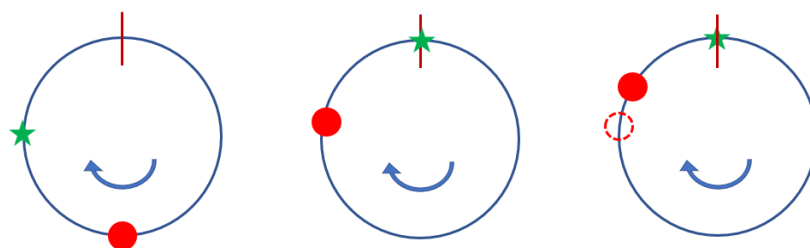
的时间，换句话说，最长等待时间依赖于小红的当时的位置。

在等待期间，小绿不动，小红继续移动。如果等待期间的某时刻 $t^* \in (t_0, t_0 + \tau]$ ，小红也达到了树下，即 $X(t^*) = 1$ ，那么两棋子相遇。如果等待时间结束时（见右图），小红仍没有到达树下，那么它们俩继续移动，此时他们的位置分别是

$$X(t_0 + \tau) = X(t_0) + \tau, \quad Y(t_0 + \tau) = 0.$$

注意，虽然小绿的坐标被重置了，但是它在圆环上的位置并没有变。

如果在某时刻小红到达树下，它也会按照相同的规则等待，最长等待时间取决于此时小绿的位置。显然，小红小绿的命运取决于最长等待时间函数 $K(\phi)$ 的形式。



(1) 我们设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数, 满足

$$f' > 0, \quad f'' < 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

并设 ε 是一个充分小的正的常数。我们定义等待时间函数

$$K(\phi) = f^{-1}(f(\phi) + \varepsilon) - \phi.$$

证明除了唯一的例外 (特定的初始距离) 之外, 无论小红和小绿的初始距离如何, 他们最终会相遇的。

(2) 我们考虑一个如下形式的 f 函数

$$f(\phi) = \frac{1}{b} \ln(1 + (e^b - 1)\phi),$$

这里 $b > 0$ 是一个常数。当 $b \ll 1, \varepsilon \ll 1$ 时, 请估算出相遇之前小红小绿走过的圈数的数量级。

答案7

(1) 我们不妨考虑从小绿结束等待开始考虑。设此时小红的坐标为 ϕ , 二者的坐标从小到大排列为 $(0, \phi)$ 。

那么经过 $1 - \phi$ 的时间, 小红达到树下, 二者坐标变成 $(1 - \phi, 1)$ 。那么小红的等待时间为 $\tau = K(1 - \phi)$ 。

当 $1 - \phi + K(1 - \phi) \geq 1$ 时, 小红和小绿在这次等待中相遇。

当 $1 - \phi + K(1 - \phi) < 1$ 时, 小绿并没有在小红等待期间达到树下, 此时二者坐标变成 $(1 - \phi + K(1 - \phi), 0)$ 。如果按照从小到大从新排列, 二者的坐标变成了 $(0, 1 - \phi + K(1 - \phi))$, 即 $(0, f^{-1}(f(1 - \phi) + \varepsilon))$ 。

我们定义

$$h(\phi) = f^{-1}(f(1 - \phi) + \varepsilon), \quad H(\phi) = h(h(\phi)).$$

假设小红和小绿一直没有相遇, 我们在每一次某个棋子刚结束等待时来从小到大观察二者的坐标, 那么如果第 n 次观察时的二者坐标为 $(0, \phi)$, 则第 $n + 1$ 次观察时的二者坐标为 $(0, h(\phi))$, 第 $n + 2$ 次观察时的二者坐标为 $(0, H(\phi))$ 。注意, 每隔两次观察, 正好是同一颗棋子在树下。

我们先来研究 $h(\phi)$ 函数。为了保证一次观察后没有相遇, 我们需要 $1 - \phi + K(1 - \phi) < 1$ 。易知, $h(\phi)$ 的定义域为 $(\delta, 1)$, 其中 $\delta = 1 - f^{-1}(1 - \varepsilon)$ 。

我们求得,

$$h'(\phi) = -(f^{-1})'(f(1 - \phi) + \varepsilon)f'(1 - \phi).$$

再根据反函数求导法则知

$$(f^{-1})'(f(1-\phi)+\varepsilon) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(1-\phi)+\varepsilon))}.$$

注意到, $f^{-1}(f(1-\phi)+\varepsilon) > 1-\phi$, 那么再由 f 的凹性, 我们有

$$h'(\phi) = -\frac{f'(1-\phi)}{f'(f^{-1}(f(1-\phi)+\varepsilon))} < -1.$$

然后我们研究 $H(\phi)$ 函数, 如果两次观察后没有相遇, 那么易知 H 的定义域为 $(\delta, h^{-1}(\delta))$ 。显然当 ε 充分小时, 这个定义域非空。

求导得, $H'(\phi) = h'(h(\phi))h'(\phi)$, 于是我们有 $H' > 1$ 。

下面我们研究 H 的不动点和稳定性。首先易知 $h(\phi)$ 在 $(\delta, h^{-1}(\delta))$ 上有唯一的不动点, 设为 ϕ^* 。那么自然也有 $H(\phi^*) = \phi^*$ 。再由 $H' > 1$, 我们容易得出

$$H(\phi) > \phi, \quad \text{when } \phi > \phi^*; \quad H(\phi) < \phi, \quad \text{when } \phi < \phi^*;$$

即 H 有唯一的不稳定平衡点。

所以除非两个棋子初始时的坐标差距是 ϕ^* , 两个棋子一定会相遇。

(2) 如果我们令 $g = f^{-1}$, 那么易得

$$g(z) = \frac{e^{bz} - 1}{e^b - 1}.$$

我们可以直接计算得到

$$h'(\phi) = -\frac{g'(f(1-\phi)+\varepsilon)}{g'(f(1-\phi))} = -e^{b\varepsilon}.$$

于是我们得到 $H'(\phi) = e^{2b\varepsilon}$, 即 H 是线性函数。那么再由 $H(\phi^*) = \phi^*$ 我们得到

$$H(\phi) = e^{2b\varepsilon}(\phi - \phi^*) + \phi^*.$$

如果我们记

$$\phi_k = H^k(\phi_0), \quad \Delta_0 = |\phi_0 - \phi^*|, \quad \Delta_k = |\phi_k - \phi^*|$$

那么, 可以直接算出

$$\Delta_k = e^{2b\varepsilon k} \Delta_0.$$

注意到, 第 $2k$ 次观察时, 每个棋子转过的圈数是 k , 且当 $\Delta_k = O(1)$ 时, 就会发生两个棋子相遇, 于是推算出相遇时

$$k = O\left(\frac{1}{b\varepsilon} \ln \frac{1}{\Delta_0}\right).$$

相遇时, 棋子走过的圈数也是 $O\left(\frac{1}{b\varepsilon} \ln \frac{1}{\Delta_0}\right)$ 。